Simulazione esame n3

09. 12. 2014

Matematica – C. d. L. in Produzioni Animali e Controllo della Fauna Selvatica

Non è permesso l'utilizzo di libri, telefoni cellulari o appunti.

1. Si lancia un dado per 3 volte, quante terne di risultati distinti si possono avere? (Ad esempio se esce 6 poi 2 poi 3, oppure 3 poi 6 poi 2, le due terne si considerano distinte). Quante di essi contengono almeno un 6? Quante esattamente un 6?

2. In un frammento di osso di un uomo primitivo la concentrazione di ^{14}C è pari al 12% della concentrazione $M(0)$ di ^{14}C che si misura nell'atmosfera e negli esseri viventi. Ricordando che la legge di decadimento della quantità $M(t)$ di ^{14}C presente in un organismo al tempo t (misurato in anni) dopo la sua morte è data da:
$$M(t) = M(0)2^{-\frac{t}{5730}},$$
datare l'epoca in cui vissuto l'uomo primitivo.

3. Date le funzioni f e g definite da: $f(x) = 2x^2 - 1$, $g(x) = \log x$, calcolare l'espressione analitica di $h(x) = (g \circ f)(x)$. Determinare inoltre:
   i) il dominio di h;
   ii) gli intervalli in cui $h(x) \geq 0$;
   iii) gli intervalli in cui h è crescente.

4. Risolvere la seguente disequazione: $2\cos(3x - \pi/3) \geq \sqrt{3}$.

5. Dato il grafico della funzione $y = f(x)$ allegato, disegnare il grafico della funzione $y = \frac{1}{f(-x)}$.

6. Date le matrici $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, calcolare, se possibile, AB' e $B'B$, ove B' indica la trasposta di B.

Esercizio (simulazione esame prof. Tonigi) — Datazione con ^{14}C (decadimento radioattivo)

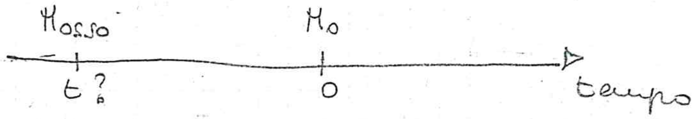
In un frammento di osso di un uomo primitivo la concentrazione di ^{14}C è pari al 12% della concentrazione M_0 di ^{14}C che si misura nell'atmosfera e negli esseri viventi.
Ricordando che la legge di decadimento della quantità $M(t)$ di ^{14}C presente al tempo t (misurato in anni) dopo la sua morte è data da:

$$M(t) = M_0 \cdot 2^{-\frac{t}{5730}},$$

datare l'epoca in cui è vissuto l'uomo primitivo

Soluzione

$$\underbrace{M(t)}_{\substack{\text{atomi di } ^{14}C \\ \text{presenti} \\ \text{individuo} \\ \text{di età } t}} = \underbrace{M_0}_{\substack{\text{atomi di } ^{14}C \\ \text{presenti} \\ \text{nell'atmosfera}}} \; 2^{-\frac{t}{5730}}$$



$$M(t) = \underset{\text{di età } t}{M_{osso}} = 12\% \cdot M_0 = 0{,}12\, M_0$$

quindi in t vale

$$0{,}12\, \cancel{M_0} = \cancel{M_0}\; 2^{-\frac{t}{5730}}$$

da cui ricavo t con la definizione di logaritmo

$$-\frac{t}{5730} = \log_2 0{,}12$$

da cui $t = -5730 \cdot \log_2 0{,}12 = -5730 \cdot \dfrac{\log_{10} 0{,}12}{\log_{10} 2} = -5730 \cdot \dfrac{-0{,}920818754}{0{,}301029996}$

$= 17527{,}5$ anni

DS Date le funzioni $f(x) = 2x^2 - 1$ e $g(x) = \ln x$

calcolare $h(x) = (g \circ f)(x)$ e determinare

i) il dominio di h

ii) gli intervalli in cui $h(x) \geq 0$

iii) gli intervalli in cui h è crescente

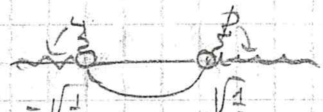
<u>Soluzione</u>

$$h(x) = (g \circ f)(x) = g(\underbrace{f(x)}_{2x^2-1}) = g(\underbrace{2x^2-1}_{VAR}) = \ln(\underbrace{2x^2-1})$$

(i) $D_{g\circ f}$ è $2x^2 - 1 > 0$ uso la parabola $2x^2 - 1 = 0$

$\frac{\cancel{2}x^2}{\cancel{2}} = \frac{1}{2}$ $x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$ $+\frac{\sqrt{2}}{2}$, $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$D_{g\circ f}: (-\infty; -\sqrt{\frac{1}{2}}) \cup (\sqrt{\frac{1}{2}}; +\infty)$



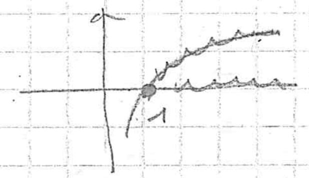
$-\sqrt{\frac{1}{2}}$ $\sqrt{\frac{1}{2}}$

$\sim -0,7$ $\sim 0,7$

$x < -\sqrt{\frac{1}{2}} \vee x > \sqrt{\frac{1}{2}}$

ii) $h(x) \geq 0$ significa

$\ln(2x^2 - 1) \geq 0$



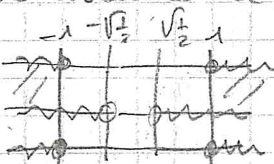
$2x^2 - 1 \geq 1$

$2x^2 - 2 \geq 0$ risolvo usando la parabola $2x^2 - 2 = 0$

$\frac{\cancel{2}x^2}{\cancel{2}} = \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}}$

$x^2 = 1$

$x = \pm 1$



(*) $\begin{cases} x \leq -1 \vee x \geq 1 \\ x < -\sqrt{\frac{1}{2}} \vee x > \sqrt{\frac{1}{2}} \end{cases}$ $\leftarrow D_h$

da cui $x \leq -1 \vee x \geq 1$

(*) $x \leq -1 \vee x \geq 1$

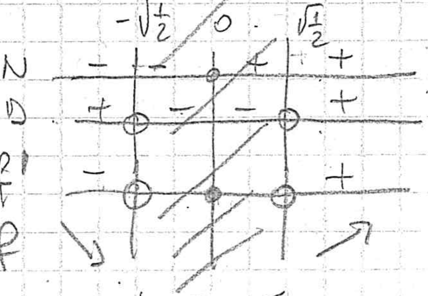
iii) calcolo $h'(x)$

$$h'(x) = \frac{1}{2x^2-1} \cdot 4x = \frac{4x}{2x^2-1}$$

Studio il segno di $h'(x)$ come voluto

$h'(x) \geq 0$ $\frac{4x}{2x^2-1} \geq 0$ $N \geq 0$ $\frac{\cancel{4}x}{\cancel{4}} \geq \frac{0}{4}$ $x \geq 0$

$D > 0$ $2x^2 - 1 > 0$ calcoli già fatti sopra



$x < -\sqrt{\frac{1}{2}} \vee x > \sqrt{\frac{1}{2}}$

Quindi

in $(\sqrt{\frac{1}{2}}; +\infty)$ f è crescente

(in $(-\infty; \sqrt{\frac{1}{2}})$ f è decrescente)

ES Risolvere la seguente disequazione

$$2\cos\left(3x-\frac{\pi}{3}\right) \geq \sqrt{3}$$

Soluzione

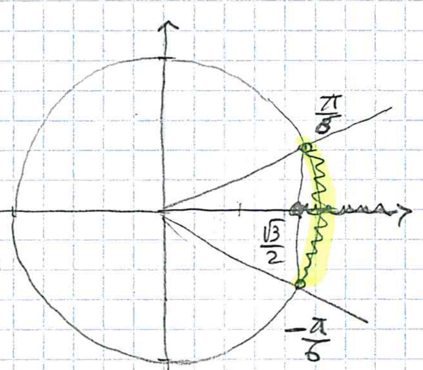
$$\frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2}\cos\left(3x-\frac{\pi}{3}\right) \geq \sqrt{3} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\underbrace{\cos\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)}_{\alpha} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

significa $\cos\alpha \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$

da cui nel primo giro

$$-\frac{\pi}{6} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{6}.$$



e consideriamo i giri successivi

$$-\frac{\pi}{6}+2k\pi \leq \alpha \leq \frac{\pi}{6}+2k\pi$$

$$-\frac{\pi}{6}+2k\pi \leq 3x-\frac{\pi}{3} \leq \frac{\pi}{6}+2k\pi$$

$$\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}+2k\pi \leq 3x \leq \frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}+2k\pi$$

$$\frac{\pi}{6}+2k\pi \leq 3x \leq \frac{\cancel{3}\pi}{\cancel{6}_2}+2k\pi$$

$$\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{\pi}{6}+2k\pi\right) \leq \frac{3x}{3} \leq \left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)\cdot\frac{1}{3}$$

Soluzione:

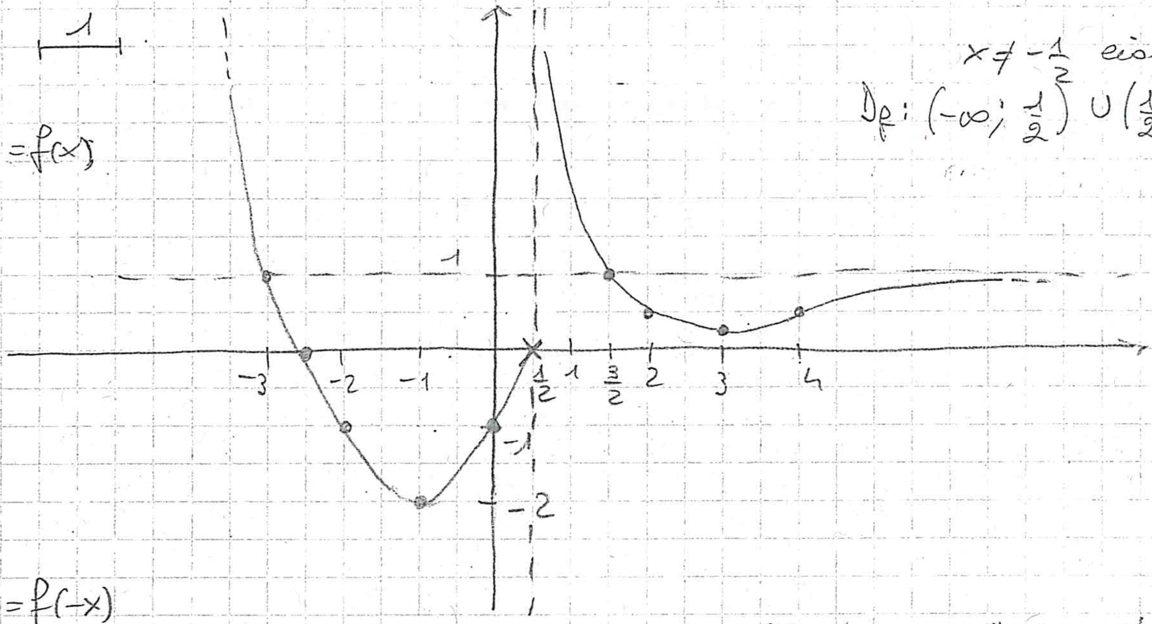
$$\frac{\pi}{18}+\frac{2}{3}k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{6}+\frac{2}{3}k\pi$$

Es) Dato il grafico della funzione $y = f(x)$ in figura, disegnare il grafico di $g(x) = \frac{1}{f(-x)}$

$x \neq \frac{1}{2}$ cioè

$D_f : \left(-\infty; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$

$y = f(x)$



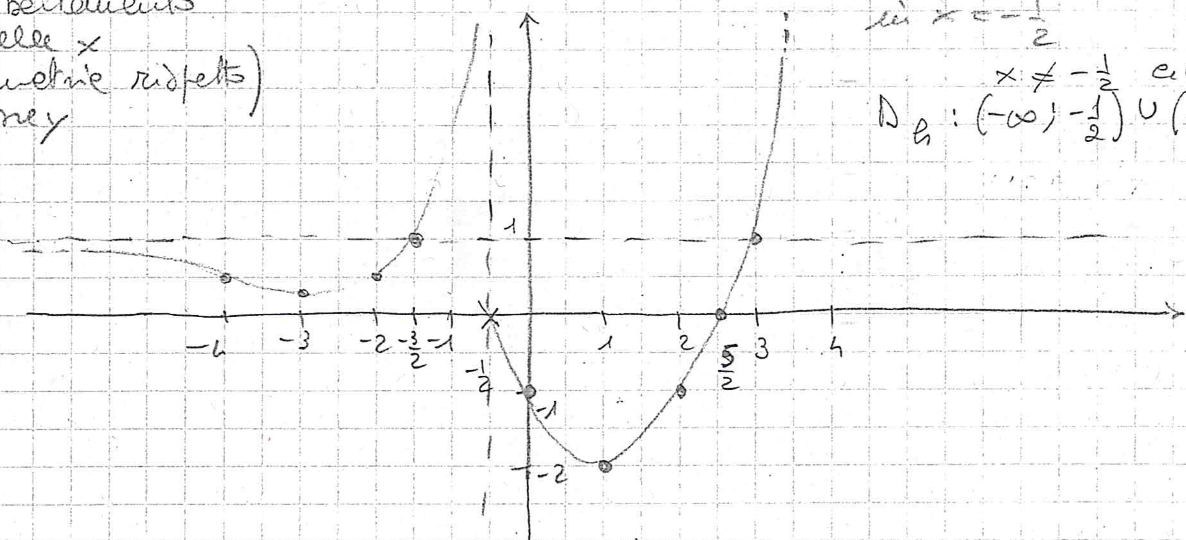
$h(x) = f(-x)$

ribaltamento della x (simmetria rispetto asse y)

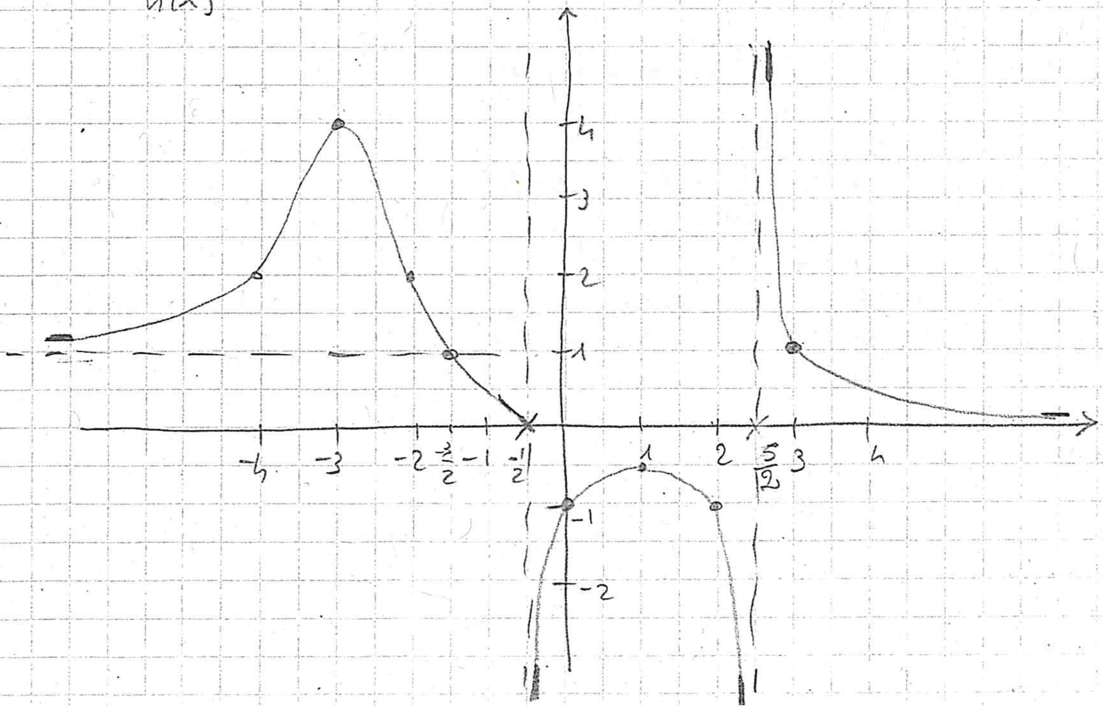
NB. pure ribalto l'asintoto $x = \frac{1}{2}$ in $x = -\frac{1}{2}$

$x \neq -\frac{1}{2}$ cioè

$D_h : \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$



$g(x) = \frac{1}{h(x)}$ (vedi i calcoli dietro)



D_f: D_h e $h(x) \neq 0$ cioè $x \neq -\frac{1}{2}$ e $x \neq \frac{5}{2}$

(poiché in $x = \frac{5}{2}$ la funzione h si annulla)

Punti di $h(x)$

$(0; -1)$

$(1, -2)$

$(2, -1)$

$(3, 1)$

$\longrightarrow$ $\left(\frac{5}{2}, 0\right)$

$\lim_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$

$\lim_{x \to \left(-\frac{1}{2}\right)^+} h(x) = 0^-$

$\lim_{x \to \left(-\frac{1}{2}\right)^-} h(x) = +\infty$

$\left(-\frac{3}{2}; 1\right)$

$\left(-2; \frac{1}{2}\right)$

$\left(-3; \frac{1}{4}\right)$

$\left(-4; \frac{1}{2}\right)$

$\lim_{x \to -\infty} h(x) = 1^-$

Punti di $f(x) = \frac{1}{h(x)}$

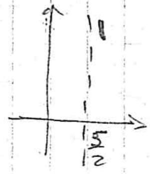
$\left(0, \frac{1}{-1}\right) = (0, -1)$

$\left(1; \frac{1}{-2}\right) = \left(1; -\frac{1}{2}\right)$

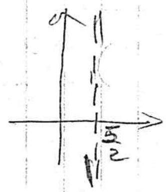
$\left(2; \frac{1}{-1}\right) = (2; -1)$

$\left(3, \frac{1}{1}\right) = (3, 1)$

$\lim_{x \to \left(\frac{5}{2}\right)^+} f(x) = \lim_{x \to \left(\frac{5}{2}\right)^+} \frac{1}{h(x)} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

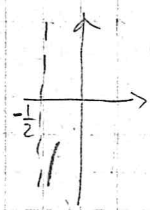


$\lim_{x \to \left(\frac{5}{2}\right)^-} f(x) = \lim_{x \to \left(\frac{5}{2}\right)^-} \frac{1}{h(x)} = \frac{1}{0^-} = -\infty$

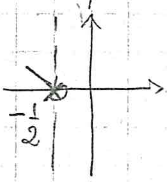


$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{h(x)} = \frac{1}{+\infty} = 0^+$

$\lim_{x \to \left(-\frac{1}{2}\right)^+} h(x) = \lim_{x \to \left(-\frac{1}{2}\right)^+} \frac{1}{h(x)} = \frac{1}{0^-} = -\infty$



$\lim_{x \to \left(-\frac{1}{2}\right)^-} h(x) = \lim_{x \to \left(-\frac{1}{2}\right)^-} \frac{1}{h(x)} = \frac{1}{+\infty} = 0^+$



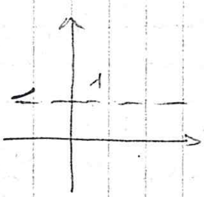
$\left(-\frac{3}{2}; \frac{1}{1}\right) = \left(-\frac{3}{2}; 1\right)$

$\left(-2; \frac{1}{\frac{1}{2}}\right) = (-2; 2)$

$\left(-3; \frac{1}{\frac{1}{4}}\right) = (-3; 4)$

$\left(-4; \frac{1}{\frac{1}{2}}\right) = (-4; 2)$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{h(x)} = \frac{1}{1^-} = 1^+$



cioè $\frac{1}{0,9} = 1,1$

B.5 Date le matrici $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$,

calcolare, se possibili, AB' e $B'B$, ove B' indica la trasposta di
(simulazione esame prof. Morigi)

<u>Soluzione</u>

$$\underset{3\times 3}{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \underset{3\times 2}{B} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \underset{2\times 3}{B'} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

- $A \cdot B'$

$3\times 3 \cdot 2 \times 3$

$\neq$

quindi il prodotto non è possibile

- $$\underset{2\times 3 \;\; 3\times 2}{B' \cdot B} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \underset{2\times 2}{=} \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & -8 \end{pmatrix}$$

$=$

quindi il prodotto è ben definito e si può calcolare

Per allenarsi:

$$\underset{3\times 3 \;\; 3\times 2}{A \cdot B} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \underset{3\times 2}{=} \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 7 & -12 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$$

$=$ il prodotto è ben definito

$$\underset{2\times 3 \cdot 3\times 3}{B' \cdot A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \underset{2\times 3}{=} \begin{pmatrix} -2 & 5 & 3 \\ 2 & -6 & -14 \end{pmatrix}$$

$=$ il prodotto è ben definito

$B \cdot A$

$3\times 2 \cdot 3\times 3$

$\neq$ il prodotto non è ben definito, non si può calcolarlo

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\underset{3\times 3 \;\; 3\times 3}{A' \cdot A} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \underset{3\times 3}{=} \begin{pmatrix} 4 & -6 & -10 \\ -6 & 11 & 17 \\ -10 & 17 & 35 \end{pmatrix}$$

$=$ prodotto ben definito

$a_{22} = 1 + 9 + 1 = 11$
$a_{23} = -1 + 15 + 3 = 17$
$a_{32} = -1 + 15 + 3 = 17$
$a_{33} = 1 + 25 + 9 = 35$

$$\underset{3\times 3 \cdot 3\times 2}{A' \cdot B} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \underset{3\times 2}{=} \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 5 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$=$ prodotto ben definito